



Hall-Effekt und Ladungstransport in Halbleitern

1 Vorausgesetzte Kenntnisse

1. Leitungsmechanismen in Metallen und Halbleitern (Drude-Modell; Bändermodell, Fermiverteilung; Leiter, Halbleiter, Isolator)
2. dotierte Halbleiter (intrinsische und extrinsische Leitfähigkeit; Inversionstemperatur)
3. einfacher Hall-Effekt, Hall-Effekt mit unterschiedlichen Ladungsträgerarten

2 Mitzubringende Hilfsmittel

Bringen Sie folgende Materialien mit:

- 2 Blätter Millimeterpapier
- 1 Blatt einfach-logarithmisches Papier (1.5 Dekaden)

3 Literatur

- Hunklinger: *Festkörperphysik*
- Kittel: *Einführung in die Festkörperphysik*
- Ibach, Lüth: *Festkörperphysik*

4 Teileliste

- 1 Netzgerät,
- 1 Teslameter mit Hallsonde,
- 1 Digitalmultimeter,
- 1 Halleffekt-Modul,
- n - und p -dotierte Germanium Trägerplatinen,
- 1 Stativ,
- 2 Spulen,
- 1 Eisenkern,
- 2 Polschuhe

5 Grundlagen

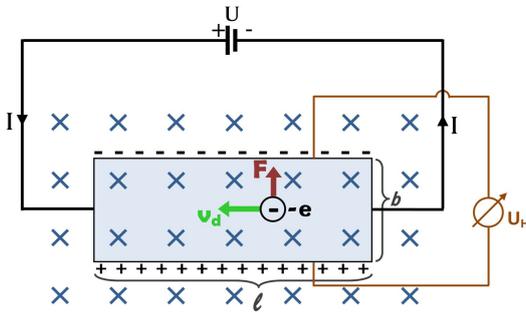


Abbildung 1: Hall-Effekt

Der Amerikaner Edwin Herbert Hall entdeckte 1879, dass an einem stromdurchflossenen quaderförmigen Plättchen der Dicke d , welches senkrecht von einem Magnetfeld der Flussdichte B durchsetzt wird, eine Spannung senkrecht zur Strom- und Magnetfeldrichtung abgegriffen werden kann. Ursache für die sogenannte *Hallspannung* U_H ist die Lorentz-Kraft. Diese wirkt senkrecht zum Feld und senkrecht zum Strom auf die mit der Driftgeschwindigkeit v_d bewegten Elektronen. Die Elektronen werden in Richtung der Lorentz-Kraft abgelenkt und sammeln sich schließlich am Rand der Probe, da sie nicht aus dem Plättchen austreten können. Somit tritt eine Potentialdifferenz die sog. Hallspannung U_H auf, für die gilt:

$$U_H = R_H \cdot \frac{I_p \cdot B}{d}, \quad (1)$$

wobei R_H die *Hall-Konstante* ist. Aus ihrem Vorzeichen lässt sich die Art der bewegten Ladungsträger bestimmen (*warum?*). Der Hall-Effekt wird im Praktikum nicht nur zur Magnetfeldvermessung, sondern auch zur mikroskopischen Untersuchung des Ladungstransports in einer Germaniumprobe eingesetzt.

5.1 Drude-Modell

Um den Ladungstransport in einem Metall verstehen zu können, entwickelte Paul Drude um 1900 ein einfaches Modell der elektrischen Leitfähigkeit. Es beruht auf der Annahme, dass sich Elektronen im Festkörper frei bewegen können und ein endlicher elektrischer Widerstand durch Stöße der Elektronen mit den Atomrümpfen hervorgerufen wird. Aufgrund der Ähnlichkeit zur Gasttheorie wird auch von „*Elektronengas*“ gesprochen. Die Elektronen besitzen dabei eine Geschwindigkeit v und stoßen nach der *mittleren Stoß- oder Relaxationszeit* τ mit den Atomrümpfen zusammen und werden im Mittel gebremst. In der klassischen Bewegungsgleichung ($F = m \cdot a$) fließt dies als Reibungsterm $\frac{m}{\tau}v$ ein. Die Bewegungsgleichung ergibt sich somit zu:

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{m}{\tau}v = -eE \quad (2)$$

Im stationären Fall mit $\frac{dv}{dt} = 0$ ergibt sich so eine *Driftgeschwindigkeit* v_d :

$$v_d = -\frac{e\tau}{m}E \equiv -\mu E \quad (3)$$

Darin ist μ per Definition die Beweglichkeit der Ladungsträger. Mit der *Ladungsträgerdichte* n der Elektronen folgt für die Stromdichte:

$$j = -en v_d = en \mu E = \sigma E \quad (4)$$

mit der elektrischen Leitfähigkeit $\sigma = en\mu$. Dies ist das Ohmsche Gesetz!

Quantitativ schlägt das Drude-Modell jedoch fehl. Grund dafür ist u. a. die Annahme des Modells, dass alle Leitungselektronen zum Ladungstransport beitragen. Die quantenmechanische Betrachtung von Elektronen im periodischen Potenzial eines Kristallgitters ergibt hingegen, dass nur Elektronen im Bereich der sog. *Fermikante* zum Ladungstransport beitragen. Die Ursache liegt letztlich darin, dass Elektronen Fermionen sind und der *Fermi-Dirac-Statistik* und damit dem *Pauli-Prinzip* gehorchen.

5.2 Bändermodell

Elektronen eines Atoms können nur bestimmte (diskrete) Energieniveaus einnehmen. Beim Annähern mehrerer Atome spalten sich diese Niveaus aufgrund des Pauli-Prinzips auf. Nähern sich N Atome einander an, so spaltet sich jedes vorherige Energieniveau in N Niveaus mit etwas unterschiedlicher Energie auf. Für eine große Anzahl N von Atomen, wie es im Festkörper der Fall ist, liegen die aufgespaltenen Energieniveaus so dicht beieinander, dass von einem quasi-kontinuierlichen Band gesprochen werden kann. Unterschiedliche Bänder können energetisch dicht oder weniger dicht beieinanderliegen und sich sogar überlappen. Zwischen ihnen liegen die verbotenen Zonen, die nicht von Elektronen besetzt werden können. Aufgrund des Pauli-Prinzips kann jedes Band von $2N$ Elektronen besetzt sein.

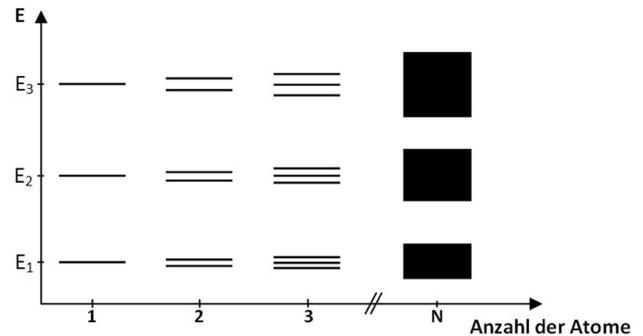


Abbildung 2: Aufspaltung der Energieniveaus

Ob es sich bei einem Material nun um einen Leiter, Halbleiter oder Isolator handelt, wird durch die Lage der Bänder zueinander sowie durch die Besetzung der Bänder mit Elektronen bestimmt. Beim absoluten Temperaturnullpunkt nimmt jedes Elektron den tiefstmöglichen Energiezustand ein, welcher noch nicht von einem anderen Elektron besetzt wurde. Das oberste energetisch vollständig besetzte Band bei $T = 0\text{ K}$ wird Valenzband genannt. Im vollständig besetzten Valenzband kann kein Ladungstransport erfolgen, da den Elektronen keine angrenzenden freien Energiezustände zur Verfügung stehen. Damit Elektronen in das nächsthöhere Band, das Leitungsband, gelangen können, muss ihnen z. B. thermische Energie zugeführt werden. Ist die zu überwindende Energie- bzw. Bandlücke E_g klein (in der Größenordnung $< 1\text{ eV}$), so spricht man von einem Halbleiter, andernfalls von einem Isolator. Ist das oberste Band nur halb gefüllt, oder überlappen sich Valenz- und Leitungsband, so können Elektronen, welche sich darin befinden, zum Ladungstransport beitragen. Es handelt sich um einen Leiter.

5.3 Halbleiter

Werden in einem Halbleiter Elektronen ins Leitungsband angeregt, so bleibt für jedes angeregte Elektron ein effektiv positiv geladenes, unbesetztes „Loch“ im Valenzband zurück. Im Bereich von Raumtemperatur nimmt die Leitfähigkeit bei Halbleitern deshalb bei steigender Temperatur deutlich zu: Je höher die Temperatur in diesem Bereich ist, desto mehr Elektronen werden thermisch ins Leitungsband angeregt, wodurch die Anzahldichte der beweglichen Ladungsträger (Elektronen im Leitungsband und Löcher im Valenzband) zunimmt. In einem undotierten Halbleiter ist die Anzahl der Elektronen im Leitungsband dabei immer gleich der der Löcher im Valenzband und es liegt sogenannte *Eigen-* oder *intrinsische Leitung* vor. Für die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit bzw. des spezifischen Widerstands gilt dann:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} \quad \text{bzw.} \quad \rho = \rho_0 \cdot e^{\frac{E_g}{2k_B T}}. \quad (5)$$

Um die Leitfähigkeit eines Halbleiters bei tiefen Temperaturen zu verbessern, besteht die Möglichkeit, ihn mit Fremdatomen zu dotieren. Zum Einen kann dies geschehen, indem das Fremdatom mehr Valenzelektronen als das Halbleiteratom selbst besitzt (n -Dotierung). In diesem Fall wird durch die Dotierung ein zusätzliches „Donator-“Niveau innerhalb der Energielücke in der Nähe der Leitungsbandunterkante

hinzugefügt. Die Elektronen aus diesem Niveau können aufgrund der geringen Energiedifferenz zum Leitungsband leicht in dieses gelangen und so zur Leitfähigkeit beitragen. Zum Anderen kann mit einem Fremdatom dotiert werden, welches ein Valenzelektron weniger besitzt als die Atome der Grundsubstanz (*p*-Dotierung). In diesem Fall wird ein „Akzeptor-Niveau“ dicht oberhalb des Valenzbandes zugefügt, in welches Elektronen aus dem gefüllten Valenzband aufgenommen werden können. Überwiegt die Leitung aufgrund der dotierten Fremdatome, so wird von *extrinsischer Leitung* gesprochen.

5.4 Hall-Effekt bei Halbleitern

Im Falle eines Halbleiters tragen sowohl Elektronen als auch Löcher zum Ladungstransport bei. Die Gesamtleitfähigkeit ergibt sich dann aus der Summe der Einzelleitfähigkeiten zu:

$$\sigma = e(n\mu_e + p\mu_h), \quad (6)$$

wobei n und p die Elektronen- bzw. Löcherkonzentration und μ_e und μ_h die Elektronen- bzw. Löcherbeweglichkeiten sind. Für die Hallkonstante R_H ergibt sich im Falle von Elektronen- und Löcherleitung

$$R_H = \frac{p\mu_h^2 - n\mu_e^2}{e(p\mu_h + n\mu_e)^2} = \frac{1}{e} \cdot \frac{p - nb^2}{(p + nb)^2}, \quad (7)$$

wobei $b = \mu_e/\mu_h$ als Verhältnis der Beweglichkeiten definiert ist. In einem Halbleiter sind die Größen n , p , μ_e und μ_h temperaturabhängig. Dies hat Einfluss auf die Hallspannung U_H und damit auf die Hallkonstante R_H . In einem *p*-dotierten Halbleiter können letztere sogar ihr Vorzeichen wechseln. Die Temperatur, bei der der Nulldurchgang beider Größen erfolgt, nennt man auch *Inversionstemperatur* T_{Inv} . Ihre Ursache liegt darin, dass bei niedrigeren Temperaturen, im extrinsischen Bereich des Halbleiters die Störstellenleitung überwiegt, während bei hohen Temperaturen die Dotierung näherungsweise vernachlässigt werden kann und deshalb intrinsische Leitfähigkeit vorliegt. Da die Elektronenbeweglichkeit typischerweise größer als die Löcherbeweglichkeit ist, kommt es so zum Vorzeichenwechsel der Hallkonstanten.

Bei der Inversionstemperatur kommen zu den dotierten Löchern mit der Akzeptorkonzentration n_A noch die durch Eigenleitung vorhandenen hinzu, sodass $p = n_A + n$ gilt.

Die Elektronenkonzentration bei extrinsischer Leitung ist $n = 0$, da die thermische Energie der Elektronen nicht ausreicht, um die Bandlücke zu überwinden. Für die extrinsische Leitfähigkeit ergibt sich mit $p = n_A + n$ aus Gleichung (6)

$$\sigma_{ext} = en_A \mu_h \quad (8)$$

und für die Leitfähigkeit bei der Inversionstemperatur I_{Inv} ergibt sich

$$\sigma_{Inv} = e(n_A\mu_h + n(\mu_h + \mu_e)). \quad (9)$$

Für die Inversionstemperatur wird (7) zu $R_H = 0$ und es zeigt sich, dass bei dieser Temperatur das Beweglichkeitsverhältnis b wie folgt bestimmt werden kann:

$$p\mu_h^2 = n\mu_e^2 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (n_A + n)\mu_h^2 + \mu_h\mu_en &= n\mu_e^2 + \mu_h\mu_en \\ \Leftrightarrow \mu_h(\mu_h(n_A + n) + \mu_en) &= \mu_e(\mu_en + \mu_hn) \\ \Leftrightarrow \frac{\mu_e}{\mu_h} &= \frac{e(\mu_h(n_A + n) + \mu_en)}{e(n(\mu_e + \mu_h))} = \frac{e(\mu_hn_A + (\mu_h + \mu_e)n)}{e(\mu_e + \mu_h)n} = \frac{\sigma_{Inv}}{\sigma_{Inv} - \sigma_{ext}} = \frac{\rho_{ext}}{\rho_{ext} - \rho_{Inv}} \end{aligned} \quad (11)$$

Der spezifische Widerstand ρ ist direkt proportional zur Probenspannung U_p bei gegebenem Strom I_p . Um den Temperaturverlauf des spezifischen Widerstandes nachzuvollziehen, reicht es folglich aus, die Probenspannung U_p bei konstantem Probenstrom I_p zu bestimmen:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{A \cdot U_p}{l \cdot I_p}, \quad (12)$$

wobei l die Länge und A der Querschnitt der Probe ist.

Die gemessene Beweglichkeit μ entspricht im extrinsischen Bereich näherungsweise der Löcherbeweglichkeit μ_h . Für sie gilt:

$$\mu_h = R_H \cdot \sigma = \frac{R_H}{\rho} \quad (13)$$

R_H kann darin mittels Umstellen von Gleichung (1) bestimmt werden. Im für diesen Versuch relevanten Temperaturbereich ist die Beweglichkeit proportional zu $T^{-\frac{3}{2}}$, sodass die Löcherbeweglichkeit bei der Inversionstemperatur über folgende Gleichung bestimmt werden kann:

$$\mu_{h,Inv} = \mu_H \left(\frac{T_{Inv}}{T_{Raum}} \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (14)$$

6 Hausaufgaben

Vor dem Praktikumstermin zu Hause zu erledigen:

1. a) Leiten Sie die Formel (1) für die Hallspannung U_H bei gegebener magnetischer Kraftflussdichte B , fließendem Strom I_p und Dicke d der plattenförmigen Probe her.
- b) Der verwendete Aufbau zeigt die Temperatur nur in °C an. Berechnen Sie die zugehörigen reziproken Temperaturen in K^{-1} , welche für die Aufgabe 2a und 2b benötigt werden. Es bietet sich an, eine Tabelle in 5°C-Schritten für den Temperaturbereich von 20 °C bis 140 °C zu erstellen.
- c) Diskutieren Sie qualitativ die Temperaturabhängigkeit der Hallspannung anhand Glg. (7) für p- und n-Dotierung.

Für Physiker: Leiten Sie Glg. (7) zusätzlich her. Nehmen Sie dabei für das Magnetfeld $\vec{B} = B_z \hat{e}_z$ und für die Probenspannung $U_p = l \cdot E_x$ an. Zeigen Sie dann, dass sich unter Berücksichtigung der Lorentzkraft aus Glg. (2) folgende Gleichungen für jeden Ladungsträgertyp (hier z. B. Löcher) ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{m}{\tau_h} v_{h,x} &= q E_x \\ \frac{m}{\tau_h} v_{h,y} &= q E_y - q v_{h,x} B_z \end{aligned}$$

Welche Näherung wurde hier gemacht? Berechnen Sie nun die Hallspannung unter der Randbedingung (warum?) $j_y = epv_{h,y} - env_{e,y} = 0$.

7 Präsenzaufgaben

1. Verwenden Sie für die nachfolgenden Messungen einen dotierten Halbleitereinkristall auf einer Trägerplatine, die Sie von Ihrem Betreuer erhalten.
 - a) Messen Sie die Hallspannung U_H bei Raumtemperatur und bei konstantem Probenstrom I_p in Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte B . Tragen Sie die Messwerte auf Millimeterpapier auf und bestimmen Sie graphisch die Hallkonstante R_H , die Ladungsträgerkonzentration und daraus den relativen Anteil an Dotieratomen (Massendichte von Germanium: 5.323 g cm^{-3} , Molmasse von Germanium: 72.63 g mol^{-1}). Bestimmen Sie auch die Art der Ladungsträger. Notieren Sie sich die Temperatur, bei der die Messung durchgeführt wurde.
 - b) Bestimmen Sie die Inversionstemperatur T_{Inv} einer p-dotierten Halbleiterprobe. Vermessen Sie dazu die Temperaturabhängigkeit der Hallspannung U_H bei konstanter magnetischer Flussdichte von $B = 300 \text{ mT}$ und konstantem Probenstrom $I_P = 30 \text{ mA}$. Betätigen Sie hierfür zunächst den Druckschalter (1), um das Display auf die Temperaturanzeige umzuschalten (vgl. Abbildung 3). Die °C-Anzeige muss leuchten. Die Probenheizung kann an der Modulrückseite durch den Druckschalter (2) ein- und ausgeschaltet werden. (**ACHTUNG: Vor der Messung die Hallsonde entfernen!**). Nachdem die Maximaltemperatur von $T = 140 \text{ °C}$ erreicht wurde, schaltet sich die Heizung automatisch ab. Bestimmen Sie aus den Daten der Abkühlkurve die Inversionstemperatur T_{Inv} .
Alternativ: Für n -dotierte Halbleiterproben: Messen Sie in derselben Konfiguration die Temperaturabhängigkeit der Hallspannung. Erläutern Sie warum es bei n -Dotierung keine Inversionstemperatur gibt. Bestimmen Sie aus den Daten $U_H(T)$ die Hallkonstante R_H bei Raumtemperatur und bei 80 °C .
2. Messen Sie die Probenspannung U_P ohne Magnetfeld bei konstantem Probenstrom $I_P = 30 \text{ mA}$ in Abhängigkeit der Temperatur. Entfernen Sie das Modul mit der Platine hierfür aus dem Bereich der Polschuhe. Sie sollten nach Möglichkeit im Temperaturbereich zwischen 140 °C und 80 °C in 10 °C -Abständen und bei weiterem Abkühlen in 5 °C -Abständen messen. Tragen Sie U_P auf einfach-logarithmischem Papier über der reziproken Temperatur $1/T$ auf.
 - a) Ermitteln Sie aus der Steigung des Graphen im intrinsischen Bereich die Bandlücke der Probe und vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem Literaturwert.
 - b) Bestimmen Sie durch Extrapolation des intrinsischen und extrinsischen Bereichs das Beweglichkeitsverhältnis der Ladungsträger bei der Inversionstemperatur T_{Inv} . Berechnen Sie nun die Elektronen- und Löcherbeweglichkeit bei der Inversionstemperatur.
Alternativ: Bestimmen Sie aus dem spezifischen Widerstand und der Hall Konstanten die Elektronenbeweglichkeit in einer n -dotierten Probe bei Raumtemperatur und bei 80 °C .

8 Hall-Effekt-Messgerät

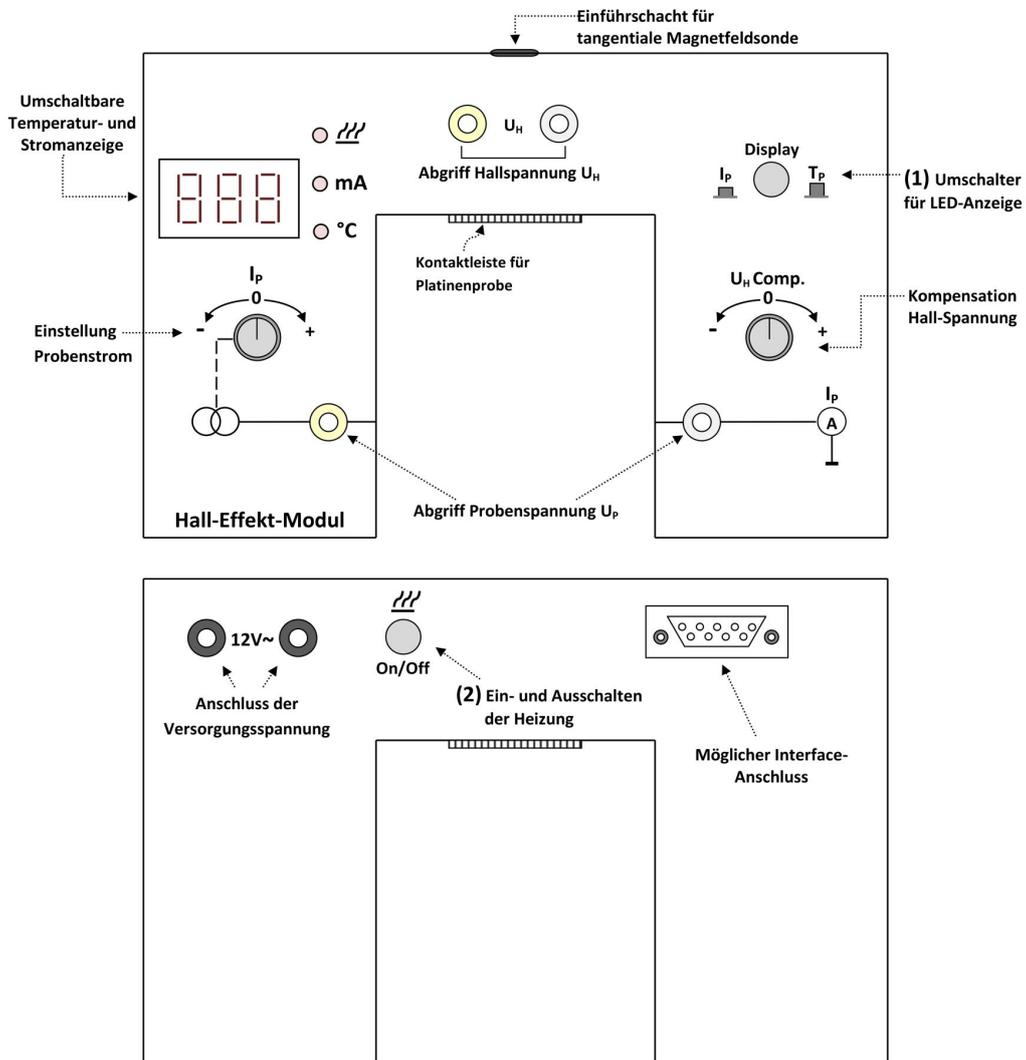


Abbildung 3: Vorder- und Rückseitenansicht des Hall-Effekt-Moduls

nützliche Zahlenwerte:

Dicke der Probe: $d = 1 \text{ mm}$
 Länge der Probe: $l = 20 \text{ mm}$
 Breite der Probe: $b = 10 \text{ mm}$

Elementarladung: $e_0 = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ As}$
 Boltzmann-Konstante: $k_B = 8.6173 \times 10^{-5} \text{ eVK}^{-1}$