

Versuchsanleitung: *Statistik des radioaktiven Zerfalls und Signifikanzprüfung bei zählenden Messungen*

Dr. Jonny Birkhan

1 Statistik des radioaktiven Zerfalls

1.1 Hausaufgabe: Simulation des radioaktiven Zerfalls

1.1.1 Quelltext entwerfen

Aufgabe ist es, den für die Simulation vorgegebenen Quelltext so zu editieren, dass er lauffähig und physikalisch richtig ist. Es genügt, wenn Sie den Quelltext handschriftlich notiert zum Versuch mitbringen. Vor Ort können Sie ihn dann testen und gegebenenfalls modifizieren.

Die Simulation des Zerfalls erfordert zwei Schleifen. In der ersten wird die Zeit, über die der Zerfall stattfindet, und in der zweiten die Anzahl an Atomkernen des jeweiligen Ensembles hochgezählt. Wann immer ein Atomkern aus jedem anfänglichen Ensemble herausgegriffen wird, muss *gewürfelt* werden, - zerfällt er oder nicht? Dies macht eine bedingte Anweisung erforderlich. In der bedingten Anweisung wird abgefragt, ob die gewürfelte Zahl zwischen null und eins kleiner als die Zerfallswahrscheinlichkeit ist, siehe dazu auch die Erklärungen in dem Vorbereitungstext zu diesem Versuch.

Gehen Sie wie folgt vor:

1. **Erklären Sie die Bedingung für den Zerfall eines Kerns** anhand eines Zahlenstrahls, wie er in **Abbildung 1** vorgegeben ist, wenn Sie die Atomkerne eines Ensembles durchgehen, um zu bestimmen, welcher Kern zerfällt. Dabei ist $\lambda = p/\Delta t$ die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit. In der Simulation gilt $\lambda = p$, wobei p auch die entsprechende Variable im Programm ist. Diese müssen Sie mit Ihren gewürfelten Zufallszahlen vergleichen.
2. **Ersetzen Sie die ausformulierten Programmteile der **Abbildung 2** ab Programmzeile 43 durch die korrekte C-Syntax**, die Sie in **Abbildung 3** zusammengefaßt finden.
3. Sie benötigen die Funktion `gsl_rng_uniform(u)` aus der GNU Scientific Library, die Zufallszahlen zwischen 0 und 1 generiert. Eine Variable r soll die Zufallszahlen, die die Funktion als Rückgabewerte liefert, aufnehmen.

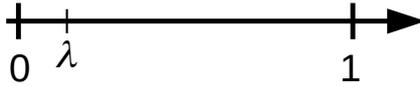


Abbildung 1: Vorlage zur Erklärung der Bedingung für den radioaktiven Zerfall in der Simulation.

```

36 //Öffnen einer Ausgabedatei
37 output = fopen(filename_intern,"w");
38
39 //Hier folgt der eigentliche Simulationsschritt
40 N_t_old = no_nucl_initial;
41 fprintf(output,"%i %li\n", 0, N_t_old);
42
43 FÜR (counter_time = 1;counter_time <= time;counter_time++) WIEDERHOLE
44 {
45     N_t_new = N_t_old;
46     FÜR (counter_nucl = 1; counter_nucl <= N_t_old; counter_nucl++) WIEDERHOLE
47     {
48         r = ZUFALLSZAHL(0->1);
49         WENN (Bedingung) DANN Anweisung;
50     }
51     N_t_old = N_t_new;
52     AUSGABE(output,"%li %li\n", Zeit, Alt);
53 }
54
55 //SPEICHERN NICHT VERGESSEN!!!!!!!!!!!!
56
57 //Schließen der Datei
58 fclose(output);

```

Abbildung 2: Quelltextvorlage zum Editieren ab Zeile 43.

```

1 //Zuweisung durch Gleichheitszeichen
2 r = gsl_rng_uniform(u);
3
4 //Dekrementieren
5 N_t_new--; <-> N_t_new = N_t_new - 1;
6
7 //Bedingte Anweisung
8 if(x<y) {Anweisungen;} else {Anweisungen;}
9 if(x<y) {Anweisungen;}
10
11 //Formatierte Ausgabe in eine Datei
12 fprintf(output, "%li %li\n", counter_time, N_t_old);
13
14 //Schleife
15 for(zaehler = 1; zaehler <= grenze; zaehler++) {Anweisungen;}

```

Abbildung 3: Zusammenfassung benötigter Programmierbefehle.

1.2 Präsenzaufgabe: Simulation des radioaktiven Zerfalls

1.2.1 Compilieren des Quelltextes

Auf Ihrem Desktop befinden sich drei Ordner: *raddec_simu*, *bin_poi_distr* und *EKG_NWG*.

1. **Öffnen Sie den Ordner *raddec_simu***, siehe Abbildung 4 am Ende dieser Versuchsanleitung.
In diesem Ordner befindet sich eine ausführbare Datei mit dem Namen *K7GUI_RadDec_Simu* (violett drachenförmiges Symbol).
2. **Durch Doppelklick auf diese Datei starten Sie die graphische Oberfläche**, siehe Abbildung 5.
Unter der Rubrik *Quelltext editieren* befindet sich ein Startknopf, der einen Texteditor mit dem zu editierenden Quelltext öffnet.
3. **Gehen zu Zeile 43 und fügen Sie Ihren Quelltext zur Simulation des radioaktiven Zerfalls ein. SPEICHERN SIE IHREN QUELLTEXT, NACHDEM SIE IHN EDITIERT HABEN UND SCHLIESSEN SIE DEN EDITOR WIEDER!**.
4. **Compilieren Sie den Quelltext durch Betätigen des Startknopfes *Compilieren***.
Wenn sich der Quelltext nicht compilieren läßt, erhalten Sie eine Fehlermeldung. Gegebenenfalls müssen Sie iterativ den Quelltext editieren und compilieren, bis keine Fehlermeldung mehr auftritt.

1.2.2 Parameterwahl

In der Rubrik *Ausführung* werden die Parameter für die durchzuführenden Simulationen eingestellt. Darunter befinden sich Startknöpfe für das Compilieren und Ausführen des Simulationsprogramms sowie für das Drucken der Bilder. Dabei ist das Detektormesszeitintervall gleich dem Zeitintervall, über das der Detektor Zerfallsereignisse mißt. Bei einer Gesamtzeit von 200 s und einer Messzeit von 1 s wird demnach 200-mal nacheinander je eine Sekunde lang gemessen. Für die Anzahl der Zerfallsereignisse in einer Sekunde wird anschließend ein Histogramm erstellt. Ein solcher Durchlauf wird 10-mal wiederholt. Wenn die Simulationen durchgelaufen sind, wird automatisch das Histogramm für die Häufigkeit der mittleren Anzahl an Zerfällen im vorgegebenen Messzeitintervall angezeigt.

Stellen Sie die Parameter der Simulationen wie folgt ein:

1. Anzahl der Kerne (am Anfang der Simulation) $N_0 = 10000$
2. Zerfallswahrscheinlichkeit $p = \lambda \cdot 1s = 0.01$
3. Gesamtzeit in Sekunden = 200
4. Detektormesszeitintervall in Sekunden = 1
5. Anzahl der Simulationen (>1) = 10

1.2.3 Simulation und Kurvenanpassung

1. **Starten Sie das Compilieren und Ausführen**, indem Sie auf den entsprechenden Startknopf klicken.
2. **Starten Sie nun die Anpassung einer Exponentialfunktion** der Form $N = N_0 \cdot \exp(-\lambda \cdot t)$ an die mittleren Zerfallsdaten aus allen Simulationen, indem Sie auf den Startknopf *Kurvenanpassung exp()* in der Rubrik *Kurvenanpassung* klicken. Bestimmen Sie darüber die Parameter N_0 und λ der Zerfallsgleichung mit ihren Unsicherheiten.
3. **Wiederholen Sie die Simulation und Kurvenanpassung** mit nur 1000, 100 und 10 Kernen am Anfang der Simulation. Die Unsicherheiten der einzelnen Datenpunkt bei der Kurvenanpassung sind nun auch in der Abbildung leichter zu beurteilen. Diskutieren Sie, woher die Sprünge im Histogramm der gemittelten Werte kommen könnten.

1.2.4 Verträglichkeitsprüfung

Sind die unter 1.2.3 2.) angepasste Teilchenzahl N'_0 und Zerfallskonstante λ' mit den Werten verträglich, die Sie in der Simulation angenommen haben? Dabei gilt $p = \lambda \cdot \Delta t$ mit $\Delta t = 1$ s für die Simulation.

1. Nutzen Sie die nachfolgende Verträglichkeitsbedingung für den Vergleich der angepassten Werte N'_0 und λ' nur für die erste Simulation mit $N_0 = 10000$ und $\lambda = 0.01$. Die Verträglichkeitsbedingung für zwei zu vergleichende Messwerte x_1 und x_2 mit ihren Unsicherheiten $u(x_1)$ und $u(x_2)$ lautet:

$$\frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}} \leq \beta \text{ mit } \beta = \sqrt{2}. \quad (1)$$

Wenn einer der beiden Vergleichswerte exakt ist, dann wird dessen Unsicherheit Null gesetzt.

2. Diskutieren Sie das Ergebnis. Sie können sich dazu auch die Rohdaten anschauen, indem Sie auf den Startknopf *Daten Kurvenanpassung* klicken. Die dritte Spalte der Daten ist dabei die Unsicherheit der Anzahl an noch vorhandenen Kernen.
3. Ein druckbares Bild ihrer Anpassung erzeugen Sie sich durch die Aktivierung des Startknopfes *Drucken* in der Rubrik *Kurvenanpassung*.

1.3 Präsenzaufgabe: Verteilung von Impulszahlen verschiedener Zeitintervalle

Sie sollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen davon ausgegangen werden kann, dass die Anzahlen an zerfallenen Atomkernen, die in aufeinander folgenden Zeitabschnitten gemessen worden sind, einer Poisson-Verteilung folgen.

Auf Ihrem Desktop befinden sich drei Ordner: *raddec_simu*, *bin_poi_distr* und *EKG_NWG*.

1. Öffnen Sie den Ordner *bin_poi_distr*, siehe Abbildung 4 am Ende der Anleitung.

In diesem Ordner befindet sich eine ausführbare Datei mit dem Namen *K7GUI_Bin_Poi_Distr* (violettes drachenförmiges Symbol).

2. Durch Doppelklick auf diese Datei starten Sie die graphische Oberfläche, siehe Abbildung 6.

Dabei bedeuten die Eingabeparameter der Eingabemaske von oben nach unten:

Anzahl der Kerne N_0 (am Anfang der Simulation),
Zerfallswahrscheinlichkeit $p = \lambda \cdot \Delta t$ mit $\Delta t = 1$ s,
Gesamtzeit in Sekunden als virtuelle Messzeit,
Name der Bilddatei, unter der das Diagramm gespeichert wird.

Bearbeiten Sie nun folgende Aufgaben:

1. Führen Sie Simulationsrechnungen mit folgenden Parameterwerten aus:

Anzahl der Kerne	=	10^5	10^5	10^5
Zerfallswahrscheinlichkeit	=	0.01	0.005	0.0001
Gesamtzeit in Sekunden	=	100	100	100
Bilddatei	=	Simu1	Simu2	Simu3

Starten Sie die Simulationen über den Startknopf *Ausführen*.

2. Das Programm erzeugt zu jedem Durchlauf ein Diagramm im PDF-Format. Drucken Sie sich die Ansicht aller Durchläufe aus und vergleichen Sie sie. Welche Auswirkung hat das Verringern der Zerfallswahrscheinlichkeit bei sonst gleichen Einstellungen? Rechnen Sie die Halbwertszeiten für die drei Fälle aus. Nutzen Sie dazu die Gleichung:

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} \quad (2)$$

3. Wiederholen Sie nun die Simulationen mit folgenden Parameterwerten:

Anzahl der Kerne	=	10^5	10^5	10^5	10^5
Zerfallswahrscheinlichkeit	=	0.001	0.001	0.001	0.001
Gesamtzeit in Sekunden	=	50	100	300	400
Bilddatei	=	Simu4	Simu5	Simu6	Simu7

Was beobachten Sie im Vergleich zu den vorigen Simulationen? Diskutieren Sie den Vergleich der Ergebnisse.

2 Signifikanzprüfung bei zählenden Messungen

2.1 Präsenzaufgabe: Messung des Hintergrundsignals

Führen Sie mit dem Ihnen zur Verfügung stehenden Detektor eine Hintergrundmessung durch, nachdem Ihnen Ihr Betreuer die radioaktive Quelle positioniert hat. Da die Detektoren nur eine kleine Nachweiswahrscheinlichkeit besitzen, muss eine künstliche Quelle genutzt werden, um hinreichend viele (nun simulierte) Hintergrundereignisse in vertretbarer Zeit zu produzieren. Die Messzeit braucht nach Maßgabe der Betreuerin oder des Betreuers nur im Sekundenbereich zu liegen.

Auf Ihrem Desktop befinden sich drei Ordner: *raddec_simu*, *bin_poi_distr* und *EKG_NWG*.

1. **Öffnen Sie den Ordner *EKG_NWG***, siehe Abbildung 4 am Ende der Versuchsanleitung.
In diesem Ordner befindet sich eine ausführbare Datei mit dem Namen *K7GUI_EKG_NWG* (violette drachenförmiges Symbol).
2. **Durch Doppelklick auf diese Datei starten Sie die graphische Oberfläche**, siehe Abbildung 7.
3. Stellen Sie in der Rubrik *Messung* unter *Messzeit* den gewünschten Wert ein.
4. Starten Sie die Messung mit dem Startknopf *Starte Messung*. Das Ergebnis wird Ihnen nach der Messung in der Rubrik *Messergebnisse* angezeigt. Zusätzlich wird der Messwert intern gespeichert.
5. Lassen Sie das Programm für die Probenmessung geöffnet und notieren Sie sich die Ergebnisse.

2.2 Präsenzaufgabe: Messung des Probensignals

Führen Sie eine Probenmessung durch, nachdem Ihnen Ihr Betreuer die radioaktive Quelle neu positioniert hat. Die Messzeit braucht nach Maßgabe der Betreuerin oder des Betreuers nur im Sekundenbereich zu liegen.

1. Betätigen Sie den Toggle-Knopf unter *Hintergrund/Probe* in der Rubrik *Messung*, um auf die Probenmessung umzuschalten.
2. Starten Sie die Messung mit dem Startknopf *Starte Messung*. Das Ergebnis wird Ihnen nach der Messung in der Rubrik *Messergebnisse* angezeigt. Zusätzlich wird der Messwert intern gespeichert.
3. Lassen Sie das Programm für die alles Weitere geöffnet und notieren Sie sich die Ergebnisse.

2.3 Präsenzaufgabe: Erkennungs-, Nachweisgrenze und bester Schätzer

1. Berechnen Sie hierauf die Erkennungs- und Nachweisgrenze sowie den besten Schätzwert, indem Sie in der Rubrik *Charakteristische Grenzen* auf den Startknopf *EKG/NWG berechnen* klicken.
2. Notieren Sie sich die Ergebnisse.
3. Füllen Sie eine Entscheidung. Die Betreuerin oder der Betreuer wird Ihnen einen aktuellen Richtwert für Ihre Messung vorgeben:
 - Haben Sie einen Probenbeitrag erkannt?
 - Ist Ihr Messverfahren für den gegebenen Zweck geeignet?Begründen Sie Ihre Entscheidung und gehen Sie dabei kurz auf die Bedeutung der beiden charakteristischen Grenzen ein.
4. Drucken Sie sich die Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichten aus, die zur Bestimmung des Posteriors und von Erkennungs- und Nachweisgrenze benutzt worden sind. Schraffieren Sie die Flächen unter den Histogrammen, die zu den Irrtumswahrscheinlichkeiten α und β gehören.

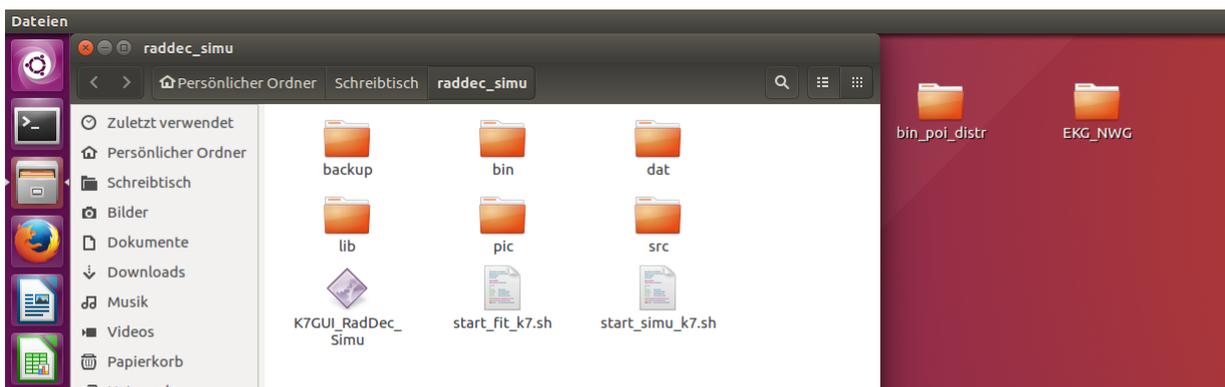


Abbildung 4: Desktopansicht mit geöffnetem Ordner *raddec_simu*. In der Ordneransicht befindet sich die ausführbare Datei *K7GUI_RadDec_Simu*, die Sie durch Doppelklick starten können.

Statistik des radioaktiven Zerfalls I

Simulation des radioaktiven Zerfalls Reset

Quelltext editieren

Quelltext öffnen

Compilieren

Ausführung

Anzahl Atomkerne
10000

Zerfallswahrscheinlichkeit
0.01

Gesamtzeit (s)
200

Messzeitintervall (s)
1

Anzahl der Simulationen
10

Simulation starten

Drucken

Ansicht alle Durchläufe

Kurvenanpassung

Kurvenanpassung exp()

Kernanzahl
aus Kurvenanpassung
N = 1

Zerfallskonstante
aus Kurvenanpassung
Lambda = (1/s)

Daten Kurvenanpassung

Drucken

Beenden

Achtung: Jedes sich öffnende Fenster muss wieder geschlossen werden, bevor der nächste Startknopf gedrückt werden kann.

Abbildung 5: Ansicht der graphischen Oberfläche K7GUI_RadDec_Simu.

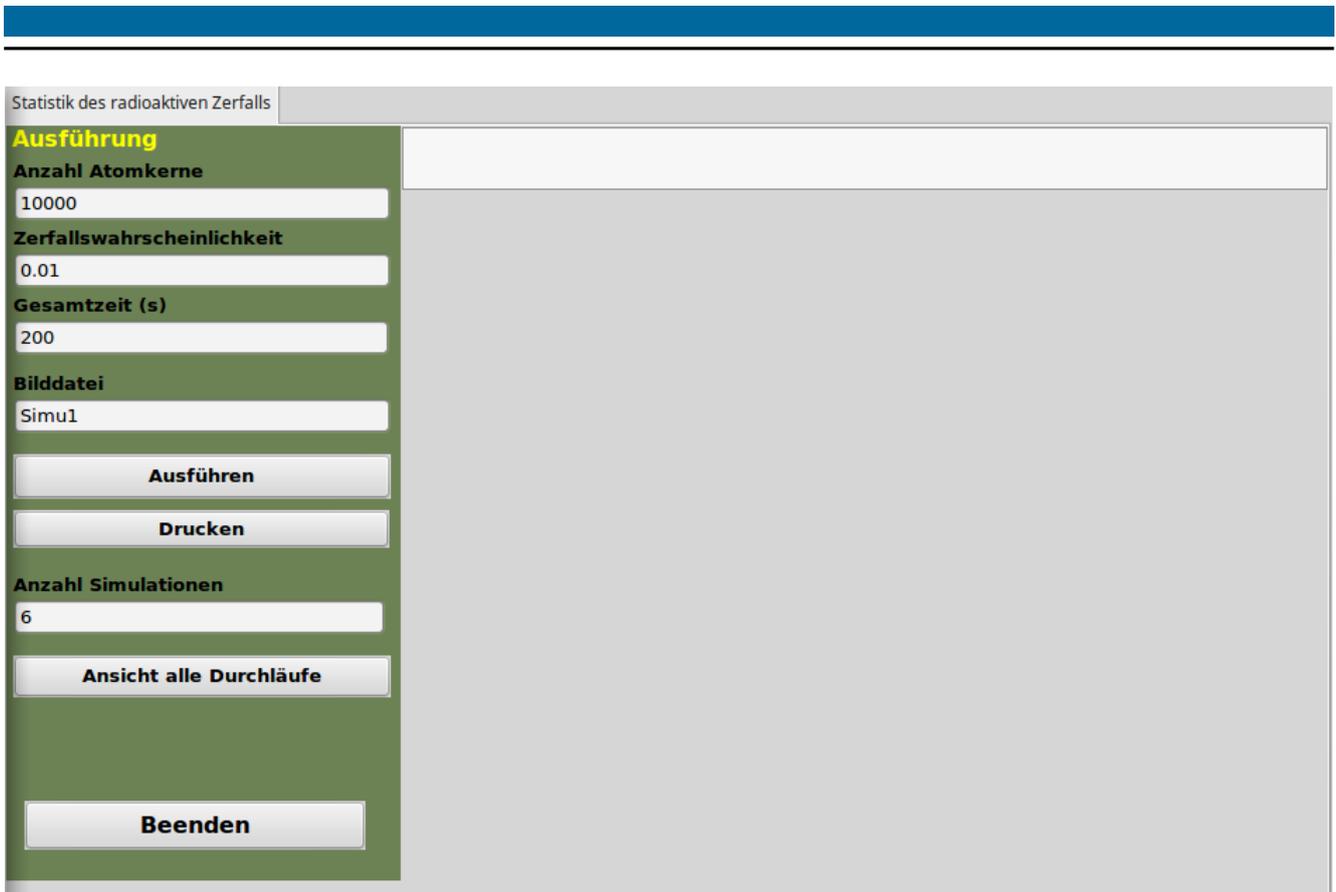


Abbildung 6: Ansicht der graphischen Oberfläche *K7GUI_Bin_Poi_Distr*.

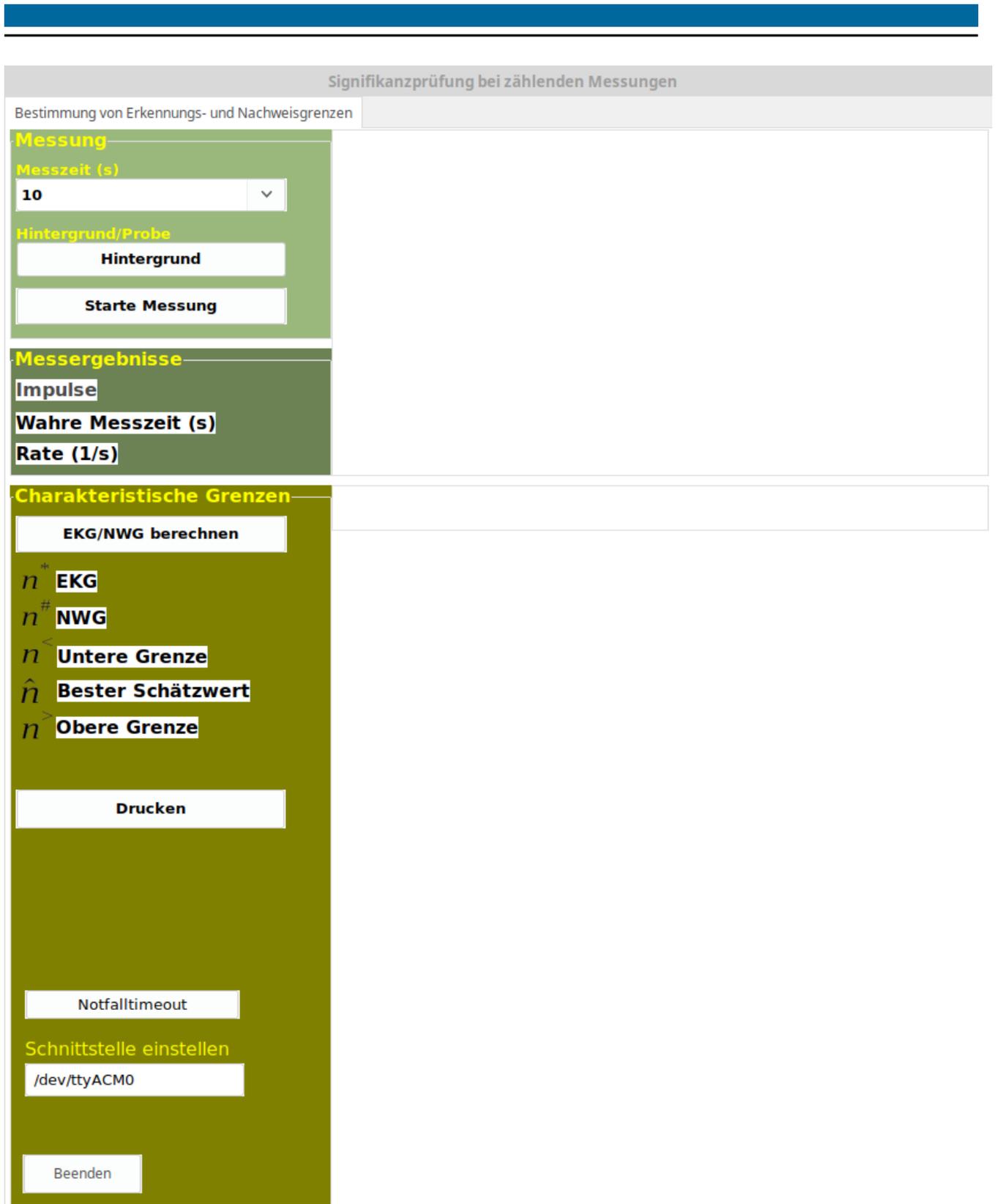


Abbildung 7: Ansicht der graphischen Oberfläche K7GUI_EKG_NWG.