M10 Physikalisches Grundpraktikum
Abteilung Mechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Kreisel

1 Vorausgesetzte Kenntnisse

1. Erhaltungssätze der Mechanik
2. Analogien zwischen Rotation und Translation
3. Trägheitsmomente und deren Berechnung
4. Satz von Steiner
5. Kräftefreier Kreisel, schwerer Kreisel
6. Kreiseltypen
7. Nutation und Präzession

Schauen Sie auch auf die Webseite der Abteilung Mechanik des Grundpraktikums. Dort finden Sie Fotos vom Aufbau und weitere Informationen.

2 Mitzubringende Hilfsmittel

Bringen Sie folgende Materialien mit:

- Millimeterpapier

3 Literatur

- Paus: *Physik in Experimenten und Beispielen*
- Halliday, Resnick, Walker: *Halliday Physik*
- Dobrinski: *Physik für Ingenieure*
- Tipler, Mosca: *Physik*

Weiterführende Literatur zur Physik des Versuches finden Sie in der Literaturmappe (nur als PDF; zugänglich über das Web-Portal des Grundpraktikums).

4 Grundlagen

Jeder rotierende starre Körper ist ein Kreisel. Grundsätzlich ergibt sich seine Bewegung aus dem dynamischen Grundgesetz bzw. den Erhaltungssätzen der Mechanik, ist aber unter allgemeinen Voraussetzungen nicht einfach zu berechnen. Man kann immer drei Rotationsachsen finden, die durch den Schwerpunkt des Körpers gehen, die senkrecht aufeinander stehen, und wo bei Rotation um jeweils eine dieser Achsen keine Unwuchten und damit keine Lagerreaktionen auftreten. Diese Achsen werden freie Achsen oder Hauptträgheitsachsen genannt. Die zugehörigen Trägheitsmomente heißen Hauptträgheitsmomente, pro Achse können sie unterschiedlich groß sein. Eine *stabile* Rotation um eine Achse ist nur möglich, wenn letztere zugleich eine Hauptträgheitsachse mit dem größten oder kleinsten Trägheitsmoment ist.

Neben der Rotation um seine Figurenachse kann ein symmetrischer Kreisel noch zwei weitere Drehbewegungen vollführen. Die allgemeine Bewegung des kräftefreien Kreisels wird **Nutation** (*lat. nutare*: nicken) genannt. Wirkt ein Drehmoment auf einen rotierenden Kreisel, so bewirkt dieses eine **Präzession** (*lat. praecedere*: vorangehen). Im Rahmen dieses Praktikumsversuchs sollen diese Bewegungsformen des Kreisels untersucht werden.

4.1 Kreiselpräzession

Lässt man ein Drehmoment $\vec{M}$ auf einen Kreisel wirken, so ändert sich der Drehimpuls $\vec{L}$ in Richtung und/oder Betrag. Es gilt analog zur Translationsbewegung:

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

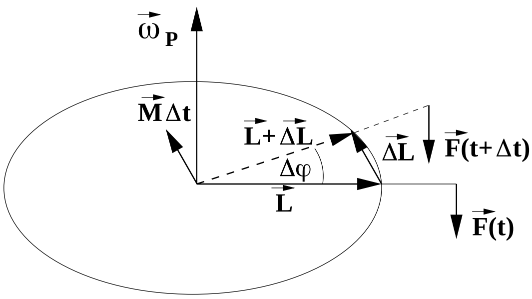


Abbildung 1: Drehimpulsänderung durch das Drehmoment, mit endlich großen Differenzen Δt, $\Delta\varphi$, $\Delta\vec{L}$. Hier stehen $\vec{L}$, $\vec{M}$ und $\vec{F}$ senkrecht zueinander.

Ein nur die Richtung änderndes Drehmoment kann durch Anhängen von Zusatzkörpern ZG mit Gesamtmasse m_{M} an die Achs-Stange erzeugt werden (s. Abb. 4). Wir nehmen vereinfachend an, dass der gesamte Drehimpulsvektor $\vec{L}$ des Kreisels horizontal liegt.

Wie aus Abb. 1 ersichtlich, bewirkt das Drehmoment $\vec{M}$ im Zeitraum Δt eine Drehimpulsänderung ($\Delta\vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t$) in der Horizontalen, die senkrecht zum Drehimpuls $\vec{L}$ steht. Der Drehimpuls ändert also seine Richtung, wobei sein Betrag konstant bleibt (sofern Δt infinitesimal ist). Die Spitze des Drehimpulsvektors durchläuft eine horizontale Kreisbahn, was in diesem Sonderfall ein völlig flacher Kegel ist. Die Winkelgeschwindigkeit ω_{P} dieser Präzessionsbewegung lässt sich wie folgt berechnen:

$$\Delta\varphi \approx \frac{|\Delta\vec{L}|}{|\vec{L}|} \approx \frac{M \cdot \Delta t}{L} \quad \Longrightarrow \quad \omega_{\mathrm{P}} \approx \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \approx \frac{M}{L} \tag{2}$$

Die Richtung von $\vec{\omega}_{\mathrm{P}}$ ist senkrecht zu $\vec{M}$ und $\vec{L}$ (Abb. 1). Verallgemeinernd gilt, dass (nur) die zu $\vec{\omega}_{\mathrm{P}}$ senkrechte Komponente von $\vec{L}$ für die Präzession maßgebend ist, vektoriell:

$$\vec{\omega}_{\mathrm{P}} \times \vec{L} = \vec{M} \tag{3}$$

Die Figurenachse des Kreisels durchläuft dann einen Kegel, dessen halber Öffnungswinkel gerade gleich dem Winkel zwischen den Vektoren $\vec{\omega}_{\mathrm{P}}$ und $\vec{L}$ ist.

Der zur Präzession eines Kreisels analoge Vorgang ist die Kreisbewegung einer punktförmigen Masse: Eine konstante, zur Geschwindigkeit der Masse senkrechte Kraft (Zentripetalkraft) bewirkt eine ständige zur Bewegungsrichtung senkrechte Änderung von Impuls und Geschwindigkeit, was zu einer Kreisbahn führt.

4.2 Nutation eines Kreisels

Wurde ein kräftefreier Kreisel derart in Rotation versetzt, dass er genau um seine Figurenachse rotiert, dann haben die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und der Drehimpuls $\vec{L}$ dieselbe Richtung. Erhält der Kreisel einen Momentenstoß, so wird $\vec{L}$ um $\Delta\vec{L} = \int \vec{M}\,\mathrm{d}t$ senkrecht zum Momentenstoß verdreht (Dieser Momentenstoß ist völlig analog zum Kraftstoß bei der Translationsbewegung: $\Delta\vec{p} = \int \vec{F}\,\mathrm{d}t$.). Die Figurenachse ist nun nicht mehr kollinear mit dem Drehimpuls. Da aber $\vec{L}$ die raumfeste Erhaltungsgröße darstellt, resultiert eine Rotation der Figurenachse um den neuen Drehimpulsvektor, der Kreisel nutiert. Eigenschaften der Nutation (s. Abb. 2).

- Die Drehimpulsachse $\vec{L}$ ist fest im Raum.
- Die Figurenachse $\vec{z}$ rotiert um $\vec{L}$. Sie beschreibt einen Kegel, den Nutationskegel.
- Die momentane Drehachse $\vec{\omega}$ ist weder raum- noch körperfest. Sie rotiert ebenfalls um $\vec{L}$ und beschreibt den Rastpolkegel.
- Wählt man einen körperfesten Bezugspunkt auf der Figurenachse, dann bewegt sich $\vec{\omega}$ auf dem Gangpolkegel um die Figurenachse.
- Die momentane Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ stellt die Berührungslinie beim Abrollen des Gangpolkegels auf dem Rastpolkegel dar.
- $\vec{L}$, $\vec{z}$ und $\vec{\omega}$ liegen in einer Ebene, die sich mit ω_N der Winkelgeschwindigkeit der Nutation, um $\vec{L}$ dreht.

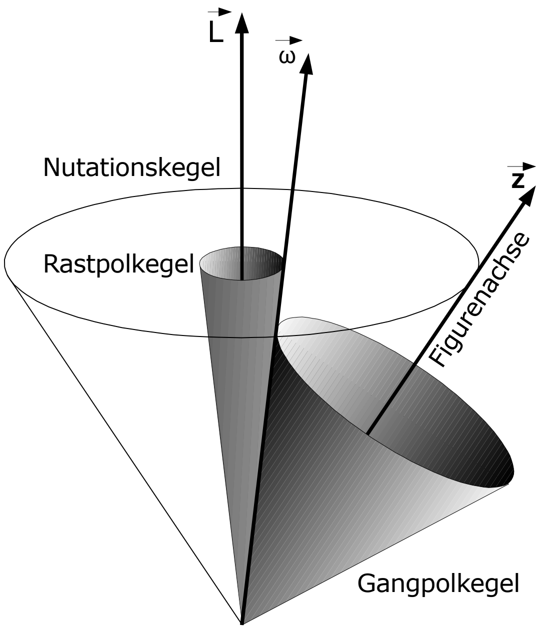


Abbildung 2:
Nutationskegel beim kräftefreien Kreisel

Im körpergebundenen rechtwinkligen Koordinatensystem repräsentiert (x, y, z) sowohl die Hauptträgheitsachsen als auch die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten

$$\vec{\omega}_x,\ \vec{\omega}_y,\ \vec{\omega}_z \tag{4}$$

und Drehimpulse

$$\vec{L}_x,\ \vec{L}_y,\ \vec{L}_z \tag{5}$$

In diesem Koordinatensystem ist die resultierende Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_z + (\vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y) \tag{6}$$

und der gesamte Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{\omega}_z I_z + (\vec{\omega}_x I_x + \vec{\omega}_y I_y) \tag{7}$$

Aufgrund der Symmetrie des verwendeten Kreisels gilt

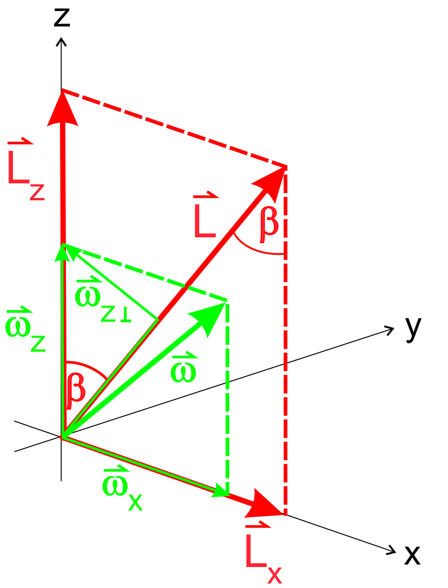
$$I_x = I_y \overset{\mathrm{def}}{=} I_s. \tag{8}$$

Wir nehmen an, dass der ursprüngliche Drehimpuls in z-Richtung zeigte ($\vec{L}_z$) und durch einen Drehmomentenstoß

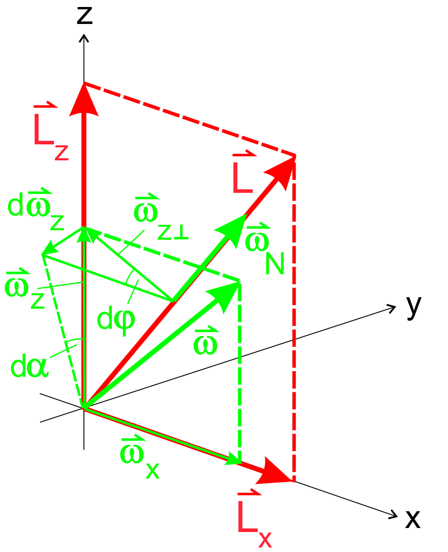
$$\int \vec{M}_x\,\mathrm{d}t = \vec{L}_x \tag{9}$$

(das entspricht einem Kraftstoß einer im Angriffspunkt $\vec{z}$ (Abstand z vom Ursprung) in negativer y-Richtung wirkenden Kraft) zum Vektor $\vec{L}$ der Abb. 3a geändert wurde. Für einen Zeitpunkt unmittelbar nach dem Drehmomentenstoß sind in Abb. 3a die Vektoren $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ sowie ihre Komponenten in x- und z-Richtung gezeichnet. Weiterhin wurde $\vec{\omega}_z$ zerlegt in die Summe aus der zu $\vec{L}$ parallelen Komponente $\vec{\omega}_{z\parallel}$ und der zu $\vec{L}$ senkrechten Komponente $\vec{\omega}_{z\perp}$. Der Winkel β wird von $\vec{L}$ und $\vec{L}_z$ definiert und tritt konstruktionsbedingt auch zwischen $\vec{\omega}_z$ und $\vec{\omega}_{z\parallel}$ auf:

$$L_z = L \cdot \cos\beta. \tag{10}$$



(a) Situation nach einem Drehmomentenstoß



(b) Zur Herleitung der Gleichungen (12), (13) und letztlich ω_{N}

Abbildung 3

Wegen der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke

$\boxed{-\vec{L}\,(\beta)\,\vec{L}_z\,(\tfrac{\pi}{2})\,\vec{L}_x}$ und $\boxed{-\vec{\omega}_z\,(\beta)\,\vec{\omega}_{z\parallel}\,(\tfrac{\pi}{2})\,\vec{\omega}_{z\perp}}$ gilt:

$$\frac{\omega_z}{\omega_{z\perp}} = \frac{L}{L_x}. \tag{11}$$

Die quantitative Bestimmung des Betrages ω_{N} der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_{\mathrm{N}}$ der Nutation erfolgt mit Hilfe der Abb. 3b:

$$\omega_x = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\omega_z} \cdot \left|\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_z}{\mathrm{d}t}\right| \tag{12}$$

und

$$\omega_{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\omega_{z\perp}} \cdot \left|\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_z}{\mathrm{d}t}\right|, \tag{13}$$

also

$$\omega_x \cdot \omega_z \overset{(12)}{=} \left|\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_z}{\mathrm{d}t}\right| \overset{(13)}{=} \omega_{\mathrm{N}} \cdot \omega_{z\perp} \tag{14}$$

und

$$\frac{\omega_{\mathrm{N}}}{\omega_x} \overset{(14)}{=} \frac{\omega_z}{\omega_{z\perp}} \overset{(11)}{=} \frac{L}{L_x} = \frac{L}{I_x \cdot \omega_x}. \tag{15}$$

Für *kleine* Winkel β ist aber

$$L \overset{(10)}{\approx} L_z = I_z \cdot \omega_z \tag{16}$$

und somit

$$\omega_{\mathrm{N}} \overset{(15)}{=} \frac{L}{I_x} \overset{(16)}{\approx} \frac{I_z}{I_x} \cdot \omega_z \overset{(8)}{=} \frac{I_z}{I_s} \cdot \omega_z. \tag{17}$$

Dieser Befund

$$\omega_{\mathrm{N}} \approx \frac{I_z}{I_s} \cdot \omega_z \tag{18}$$

enthält keine zeitabhängigen Größen mehr!

5 Versuchsbeschreibung

Die im Experiment verwendete Anordnung (Abb. 4) ist ein rotationssymmetrischer Kreisel: Die z-Achse als Symmetrieachse der rotationssymmetrischen Anordnung aus Achs-Stange A, Rotor (Schwungscheibe) R und Gegenscheiben G und H verläuft durch den Schwerpunkt, wo der Standfuß F die Gewichtskraft der Anordnung aufnimmt. Ein Lager im Fuß erlaubt Drehungen (Schwenken) einer Haltegabel um eine lotrechte Achse (y-Achse), ein weiteres Lager in der Haltegabel erlaubt Drehungen (Neigen) um eine horizontale Achse (x-Achse), welche ihrerseits senkrecht zur z-Achse liegt. Die Richtung von z (Figurenachse) wird durch den Drehsinn des Rotors festgelegt (Rechtsschraube). Wegen der Rotationssymmetrie dürfen wir zu jedem Zeitpunkt (Momentaufnahme) die verbleibenden Hauptträgheitsachsen x, y in der zu z senkrechten Ebene durch den Schwerpunkt frei wählen. Unabhängig von der gewählten x-Richtung sind die Hauptträgheitsmomente I_x und I_y stets gleich groß. In ihre Berechnung gehen A, R, G und H ein, jedoch kann A wegen der geringen Dichte von Aluminium vernachlässigt werden.

Mit Blick auf Präsenzaufgabe 2 legen wir die x-Achse horizontal durch das Lager in der Gabel: Die in dieser Aufgabe angebrachte Zusatzlast m_{M} verursacht einen Drehmomentvektor $\vec{M}$ in x-Richtung.

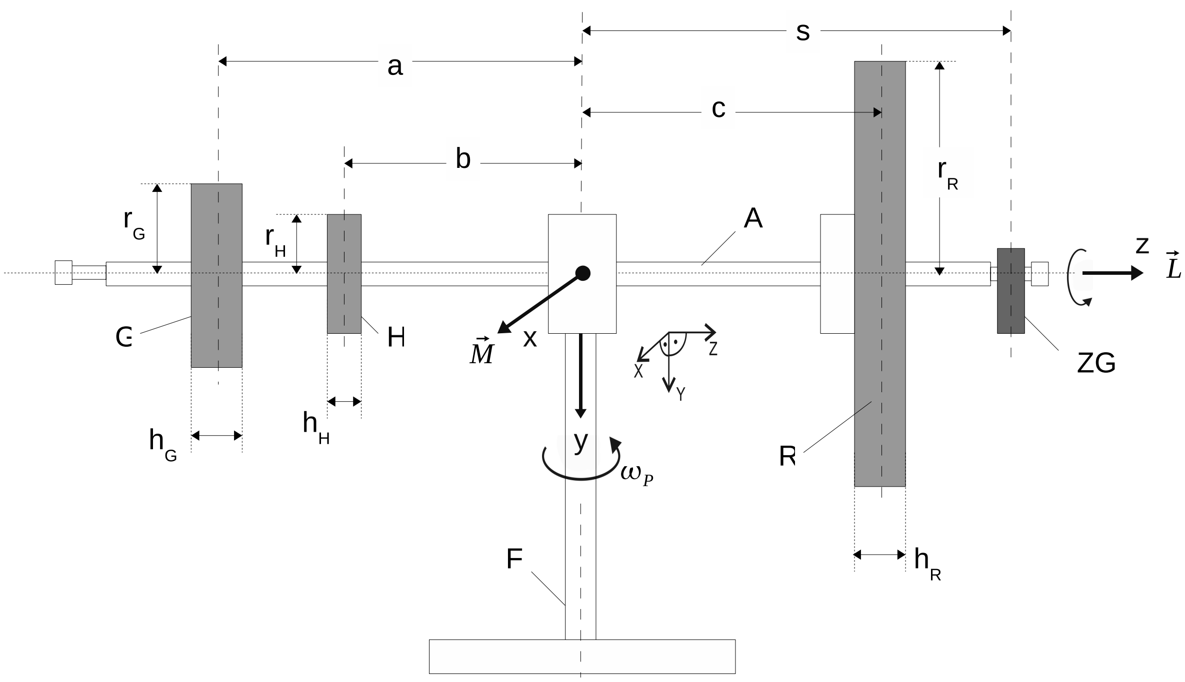


Abbildung 4: Versuchsskizze. Für die Kreiselbewegung dreht sich nur Rotor R um die Achsstange A (= Achse z). Die Achsstange A sitzt auf Fuß F und kann sich um die Achsen x (= horizontale Achse, hier aus der Bildebene heraus) und y (= vertikale Achse) frei drehen.

m_G	=	(900 ± 2)	g	Gegenscheibe G
r_G	=	(35.0 ± 0.2)	mm	Zylinderradius
h_G	=	(31.6 ± 0.2)	mm	Zylinderhöhe
a	=	$(\mathrm{a} \pm \Delta \mathrm{a})$	mm	Hebelarm
m_H	=	(40 ± 1)	g	Gegenscheibe H
r_H	=	(22.3 ± 0.2)	mm	Zylinderradius
h_H	=	(19.1 ± 0.2)	mm	Zylinderhöhe
b	=	$(\mathrm{b} \pm \Delta \mathrm{b})$	mm	Hebelarm

m_R	=	(1726 ± 15)	g	Rotor R
r_R	=	(127.6 ± 0.2)	mm	Zylinderradius
h_R	=	(22.2 ± 0.2)	mm	Zylinderhöhe
c	=	(147 ± 2)	mm	Hebelarm
m_M	=	75, 100, 125, 150, 170	g	moment-erzeugende Zusatzmassen ZG
s	=	(212.5 ± 2)	mm	Hebelarm

Die y-Achse wird so orientiert, dass (x, y, z) ein rechtshändiges rechtwinkliges Koordinatensystem darstellt. Achtung: Im geneigten Zustand ist die y-Achse *nicht* mehr lotrecht!

„Theoretisch sauber“, aber experimentell unpraktisch müsste ein drittes Lager erlauben, dass die gesamte Anordnung A+R+G+H um die z-Achse rotiert. Zur Vereinfachung der Handhabung wird ein technischer Kunstgriff eingesetzt: Nur der Rotor R ist um die z-Achse drehbar gelagert, Achs-Stange und Gegenscheibe nehmen an dieser Rotation nicht teil. Für das dritte Hauptträgheitsmoment I_z ist ausschließlich die Rotormasse verantwortlich. Unser Kreisel hat bei Rotation um die z-Achse ein minimales Trägheitsmoment I_z, während die zwei dazu senkrechten Trägheitsmomente I_x und I_y gleich und maximal sind.

Der Rotor wird mit Hilfe einer Zugschnur in schnelle Rotation versetzt. In der Startphase wird die Achs-Stange A festgehalten und in eine ortsfeste horizontale Lage gebracht.

Die Rotationsfrequenz des Rotors wird im Versuch mit Hilfe einer Lichtschranke gemessen.

6 Hausaufgaben

Vor dem Praktikumstermin zu Hause zu erledigen:

Berechnen Sie I_s und I_z aus den Massen und den Geometrieangaben in Abhängigkeit der Hebelarme a und b (Abb. 4 und zugehörige Tabelle). Beachten Sie Glg. (8) und rechnen Sie ohne Zusatzmassen ZG. Vorsicht bei der Berechnung von I_z: nur der Rotor R dreht sich!

Berechnen Sie auch die Unsicherheiten in Abhängigkeit von a, b, Δa und Δb. Vervollständigen Sie die Rechnung zu Versuchsbeginn.

7 Präsenzaufgaben

1. Bestimmen Sie die Rotationsperiode des Kreisels in Abhängigkeit von der Zeit nach einmaligem Andrehen. (8 Messpunkte im Abstand von 30 s). Erstellen Sie ein Diagramm $T_z(t)$.

   Während jeder der Messungen zu den Präsenzaufgaben 2 und 3 wird sich die Periodendauer T_z infolge Reibung vergrößern; mittlere T_z werden jeweils als arithmetische Mittelwerte der vor und nach jeder Einzelmessung bestimmten $T_{z,\mathrm{v}}$ und $T_{z,\mathrm{n}}$ errechnet. Diskutieren Sie anhand des Diagramms die Zulässigkeit dieses Verfahrens.

2. Messen Sie die Rotationsperiode T_z und die Präzessionsperiode (Umlaufdauer der Präzession) T_P als Funktion des Drehmoments $|\vec{M}|$ (verursacht durch die 5 verschiedenen Zusatzlasten ZG). Nutzen Sie zur Bestimmung der Präzessionsperiode eine Stoppuhr und schätzen Sie die auftretende Messunsicherheit sinnvoll ab. $|\vec{L}|$ soll möglichst konstant sein.

   TIPP: Um die Nutation zu unterdrücken, führen Sie zu Beginn die Achsstange kurz mit beiden Händen. Die Messdaten dürfen erst nach dem Loslassen der Stange aufgezeichnet werden!

   Tragen Sie $(T_z \cdot T_\mathrm{P})$ gegen $1/M$ auf. Ermitteln Sie I_z aus dieser Auftragung.

3. Bestimmen Sie die Nutationsperiode T_N in Abhängigkeit von der Umlaufzeit T_z. Bestimmen Sie dafür mit Hilfe der Stoppuhr die Dauer von 5 Nutationsperioden und ermitteln Sie die zugehörige Messunsicherheit. Nehmen Sie 8 Wertepaare auf.

   Tragen Sie die Funktion $T_\mathrm{N}(T_z)$ auf. Aus deren Steigung ($=I_s/I_z$) soll I_s bestimmt werden. Verwenden Sie dazu I_z aus Präsenzaufgabe 2.

4. Ein zweiter Rotor läuft auf der z-Achse mit gleicher Rotationsperiode, aber gegensinnig zum ersten Rotor. Was ändert sich am Verhalten des Kreisels? Beschreiben Sie ihre Beobachtung und erklären Sie die Ursache dafür.

5. Vergleichen Sie die Ergebnisse aus der Hausaufgabe mit denen aus den Präsenzaufgaben 2 und 3, und geben sie die Abweichungen in Prozent an. Diskutieren Sie anschließend die Abweichungen und deren mögliche Ursachen.