Physikalisches Grundpraktikum
Abteilung Mechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fallbeschleunigung

1 Vorbereitung

- Rotationsbewegungen
- Trägheitsmomente und deren Berechnung (spez. für einen dünnen Stab und für eine Vollkugel, Steiner'scher Satz)
- Schwingungsgleichung (mathematisches und physikalisches Pendel) ohne und mit Dämpfung (Amplitudenverlauf)
- Auftrieb (Archimedisches Prinzip), Gravitationsgesetz, thermischer Ausdehnungskoeffizient
- Bei Interesse kann die Fehlerrechnung zu Aufgabe 4 schon vorbereitet werden (handschriftlich), so dass nur noch Werte eingesetzt werden müssen. Fehlerbehaftete Größen sind l, T, r_K, m_F und m_K.

2 Mitzubringen

Millimeterpapier DIN A4

3 Literatur

Geeignet sind die Kapitel „Mechanik“ und „Thermische Eigenschaften“ aller Lehrbücher zur Experimentalphysik und zum Physikalischen Praktikum. Weiterführende Literatur zur Physik des Versuches finden Sie in der Literaturmappe (nur als PDF; zugänglich über das Web-Portal des Grundpraktikums).

4 Grundlagen

Die Fallbeschleunigung g wird hier aus der Schwingungsdauer T eines um die Achse A schwingenden Pendels bestimmt. Das ist mit hoher Genauigkeit möglich, wenn mit sehr kleinen Auslenkungen gearbeitet wird. Die Schwingungsdauer ergibt sich aus der Bewegungsgleichung:

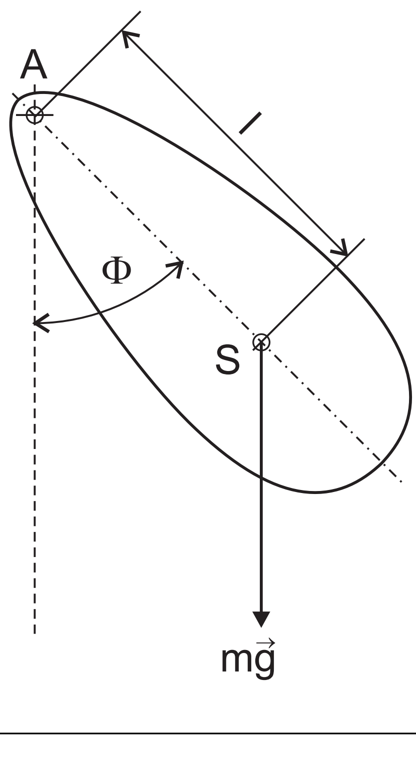
$$I_A \cdot \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = M(\phi) \quad . \tag{1}$$

Es ist hierbei: ϕ der Winkel der Auslenkung und I_A das Trägheitsmoment des beliebig geformten Körpers um die Achse A. $M(\phi)$ ist das rücktreibende Drehmoment; speziell für das ungedämpfte Pendel der Masse m_P mit Schwerpunkt S gilt:

$$M(\phi) = -m_\mathrm{P} \cdot g \cdot l \cdot \sin\phi \; . \tag{2}$$

Für kleine Auslenkungen (Winkel $\phi \ll 1$) ist $\sin\phi \approx \phi$ (ϕ im Bogenmaß!). Damit folgt aus Gleichung (1) und (2) näherungsweise:

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{m_\mathrm{P} g l}{I_A} \cdot \phi \; . \tag{3}$$



Eine Lösung von (3) lautet $\phi = \widehat{\phi} \cdot \cos \omega_0 t$. Durch Einsetzen dieser Lösung in die Näherungsgleichung (3) folgt für die Kreisfrequenz:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m_P g l}{I_A}} \text{ bzw. für die Schwingungsdauer: } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_A}{m_P g l}}\,. \tag{4}$$

Tatsächlich nimmt jedoch das rücktreibende Moment proportional zu $\sin \phi$ und damit schwächer zu als nach Gleichung (3). Dadurch wird mit zunehmender Schwingungsamplitude die Schwingungsdauer T gegenüber T_0 geringfügig größer. Die Lösung der Gleichung (2) (mit (1)) führt auf ein *elliptisches Integral*, das durch eine unendliche Reihe dargestellt werden kann. Wenn $\widehat{\phi} \ll 1$, dann gilt:

$$T = T_0 \cdot \left(1 + \frac{\widehat{\phi}^2}{16}\right) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_A}{m_P g l}} \cdot \left(1 + \frac{\widehat{\phi}^2}{16}\right) \tag{5}$$

Wiederum eine Näherungslösung, aber eine, die die Amplitudenabhängigkeit der Periodendauer beschreibt, im Gegensatz zur Lösung der Gleichung (3).

Besteht das Pendel wie hier aus einer Kugel der Masse m_K, die an einem dünnen Draht der Länge l aufgehängt ist, dann ist das Trägheitsmoment in erster Näherung: $I_A \approx m_K l^2$,
und mit Gleichung (5) folgt:

$$g = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{T^2} \cdot \left(1 + \frac{\widehat{\phi}^2}{16}\right)^2\,. \tag{6}$$

Für eine sehr genaue Bestimmung der Fallbeschleunigung sind jedoch zusätzliche Korrekturen notwendig.

- Das idealisierte Trägheitsmoment $m_K l^2$ vergrößert sich durch das Trägheitsmoment des Fadens I_F um die Achse A und das des Pendelkörpers (Kugel der Masse m_K) um seine Schwerpunktachse I_K. Dann folgt: (r_K = Kugelradius)

$$I_A = I_K + I_F + m_K l^2 = \frac{2}{5} m_K r_K^2 + \frac{1}{3} m_F l^2 + m_K l^2 = m_K l^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\frac{r_K^2}{l^2} + \frac{1}{3}\frac{m_F}{m_K}\right)\,. \tag{7}$$

- Das rücktreibende Moment M wird vergrößert durch das Gewicht des Fadens $m_F g$ und vermindert durch den Auftrieb, den die Kugel durch die umgebende Luft erfährt. Es gilt dann:

$$m_P g l = (\varrho_K - \varrho_L) \cdot V_K g l + \frac{m_F g l}{2} = m_K g l \cdot \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_K} + \frac{1}{2}\frac{m_F}{m_K}\right)\,. \tag{8}$$

(Es bedeuten: ϱ_K : Dichte der Kugel, ϱ_L : Dichte der Luft, V_K : Kugelvolumen)

Setzt man Gleichung (7) und (8) in die Gleichung (5) ein, erhält man für die Schwingungsdauer T in Abhängigkeit von $\widehat{\phi}$:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 l \cdot (1 + \frac{2}{5}\frac{r_K^2}{l^2} + \frac{1}{3}\frac{m_F}{m_K})}{g \cdot (1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_K} + \frac{1}{2}\frac{m_F}{m_K})} \cdot (1 + \frac{\widehat{\phi}^2}{16})^2\,. \tag{9}$$

In den Klammern sind alle Summanden nach der führenden Eins sehr klein gegen Eins. Dann kann man durch „Entwickeln" ($(1 \pm x)^m \cong 1 \pm mx$ für $x \ll 1$) die Nenner-Klammer in den Zähler bringen und anschließend beim Ausmultiplizieren der Klammern die extrem kleinen Produkte aus je zwei „kleinen Größen" vernachlässigen. Dann folgt aus Gleichung (9):

$$g \approx 4\pi^2 \cdot \frac{l}{T^2}\left(1 + \frac{\widehat{\phi}^2}{8} + \frac{2}{5}\frac{r_K^2}{l^2} - \frac{1}{6}\frac{m_F}{m_K} + \frac{\varrho_L}{\varrho_K}\right)\,. \tag{10}$$

Die geringfügige Dämpfung durch Reibung (Luftreibung, Lager) beeinflusst die Schwingungsdauer nicht messbar, führt aber zu einer Amplitudenabnahme mit der Zeit. Dies kann durch Mittelwertbildung für $\widehat{\phi}$ berücksichtigt werden, wobei in guter Näherung gilt: $\widehat{\phi}^2 \approx ((\widehat{\phi}_0 + \widehat{\phi}_n)/2)^2$ mit $\widehat{\phi}_0$ als Anfangs- und $\widehat{\phi}_n$ als Endamplitude nach n Schwingungsperioden.

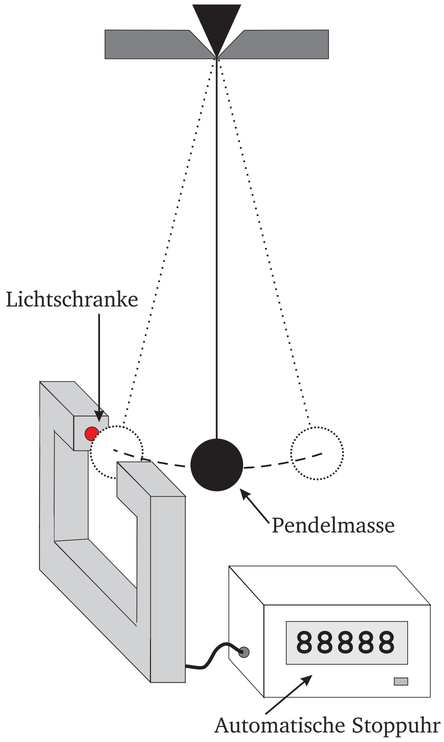


Abbildung 1: Versuchsskizze

5 Aufgaben

1. **Hausaufgaben (vor dem Versuch zuhause erledigen!):**
   a) **Für alle:** Recherchieren Sie einen möglichst genauen Literaturwert der Fallbeschleunigung g für die Praktikumsräume (49.877825° Nord, 8,656181° Ost, 150 m ü. NN), z. B. über die Physikalisch-Technische Bundesanstalt: `http://www.ptb.de/de/org/1/11/115/index.htm`
   b) **Für Bau-, Umweltingenieure und Geowissenschaftler:** Wo ist die exakte und ortsabhängige Bestimmung der Fallbeschleunigung in ihrem Studiengang von Bedeutung? (siehe auch Literaturmappe zum Versuch)
2. Bestimmen Sie die Pendellänge l nach Hinweisen der Betreuerin bzw. des Betreuers durch Vergleich mit dem Eichstab aus Metall. Wie groß ist die Unsicherheit Δl?
3. Überprüfen Sie den Einfluss der Amplitude $\widehat{\phi}$ der Pendelschwingung auf die Schwingungsdauer T. Nach Gleichung (5) gilt: $T = T_0(1 + \widehat{\phi}^2/16)$.
   a) Messen Sie die Schwingungsdauer T für **32 Vollschwingungen** in Abhängigkeit von $\widehat{\phi}$. Wählen Sie für $\widehat{\phi}$ nacheinander 10 verschiedene Auslenkungen ($3° \leq \widehat{\phi}_0 \leq 7.5°$). Stellen Sie dann T für **eine Schwingung** als Funktion von $\widehat{\phi}^2$ graphisch dar.
   b) Ermitteln Sie aus der graphischen Darstellung $T_0 = T(\widehat{\phi} = 0)$ und die Unsicherheit ΔT_0.
   c) Bestimmen Sie die Steigung in ihrer graphischen Darstellung. Können Sie Gleichung (5) bestätigen?
4. Berechnen Sie nach Gleichung (6) mit $T = T_0$ (für eine Schwingung) und $\widehat{\phi}^2 = 0$ die Fallbeschleunigung g. Als oben erwähnte Korrektur ist vom Ergebnis $0.001\,\mathrm{m/s^2}$ zu subtrahieren. Die Unsicherheit für g ist anzugeben, und Abweichungen gegenüber dem Literaturwert sind zu begründen.
   Studierende Physik/Maschinenbau rechnen mit Gleichung (10), die bereits entsprechende Korrekturterme enthält.