M8

Physikalisches Grundpraktikum
Abteilung Mechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Drehbewegung

1 Vorausgesetzte Kenntnisse

1. Drehbewegung, Drehmoment; Analogien zur Translation
2. mechanische (Dreh-)Schwingung
3. Newton'sche Axiome, Bewegungsgleichung
4. Trägheitsmomente und deren Berechnung (Herleitung), Steiner'scher Satz

2 Mitzubringende Hilfsmittel

Bringen Sie folgende Materialien mit:

- 1 Blatt Millimeterpapier.

Schauen Sie auch auf die Webseite der Abteilung Mechanik des Grundpraktikums. Dort finden Sie Fotos vom Aufbau und weitere Informationen.

3 Literatur

Passende Kapitel in allen Büchern zur Mechanik, z. B.

- Demtröder: *Experimentalphysik* Bd. 1: *Mechanik und Wärme*,
- Halliday, Resnick, Walker: *Halliday Physik*,
- Hering, Martin, Stohrer: *Physik für Ingenieure*,
- Tipler, Mosca: *Physik*.

4 Grundlagen

Ein starrer Körper mit einem Trägheitsmoment I, der möglichst reibungsfrei auf einer Rotationsachse gelagert ist und durch ein elastisches Element (z.B. eine Spiralfeder) in seiner Gleichgewichtslage gehalten wird, führt bei Auslenkung eine Drehschwingung aus.

Bei Auslenkung aus der Gleichgewichtslage um den Winkel φ (im Bogenmaß) wirkt die Feder mit einem rücktreibenden Moment

$$M_D = -D \cdot \varphi \tag{1}$$

welches der Auslenkung proportional und entgegen gerichtet ist (der Proportionalitätsfaktor D ist das Richtmoment der Feder). Ohne weitere äußere Einflüsse vollführt der Körper freie Schwingungen.

Um das Trägheitsmoment I des Drehkörpers bezüglich seiner Drehachse zu bestimmen, stellt man zunächst die Bewegungsgleichung des Systems auf:

$$I \cdot \ddot{\varphi} = M_D \tag{2}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist von der Form:

$$\varphi(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t) \tag{3}$$

wobei die Konstanten a_1 und a_2 durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden. Für die Kreisfrequenz ω ergibt sich so aus Glg. (3):

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I}} \tag{4}$$

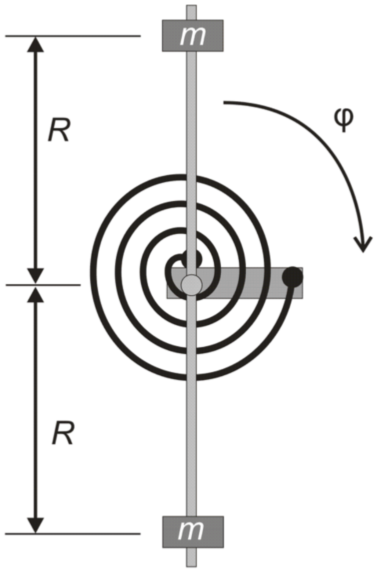

Abbildung 1: Versuchsskizze (Draufsicht)

Das Trägheitsmoment eines Körpers lässt sich somit aus der Periode T einer Drehschwingung berechnen. Mit $\omega = 2\pi/T$ ergibt sich:

$$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2} \tag{5}$$

Das Gesamtträgheitsmoment I des Körpers von Abb. 1 (Hantel) setzt sich zusammen aus dem Trägheitsmoment I_{St} der Stange (dünner Stab mit Durchmesser $d_{\mathrm{St}} \ll$ Länge l_{St}) und dem Trägheitsmoment I_m der beiden zylindrischen Massestücke:

$$I = 2 \cdot I_m + I_{\mathrm{St}}. \tag{6}$$

Die lange Achse des Stabes und die Symmetrieachse der zylindrischen Massestücke liegen auf einer Achse und senkrecht zur Drehachse (siehe Abb. 1). Das Trägheitsmoment I_m der beiden zylindrischen Massestücke setzt sich nach dem Steiner'schen Satz aus zwei Termen zusammen:

$$I_m = I_0 + m \cdot R^2. \tag{7}$$

Dabei bezeichnet I_0 das Trägheitsmoment um eine zur Drehachse parallelen Achse durch den Schwerpunkt des Massestückes (hier senkrecht zur Symmetrieachse), m ist die Masse eines Massestückes und R der Abstand von der Drehachse.

5 Daten der Probekörper

Im Verlauf des Versuches werden die Trägheitsmomente unterschiedlicher Probekörper berechnet und experimentell bestimmt. Abb. 1 zeigt die Anordnung a) „Hantel“, während in Abb. 2 die weiteren Probekörper zu sehen sind. Die zugehörigen Daten sind im Folgenden genannt:

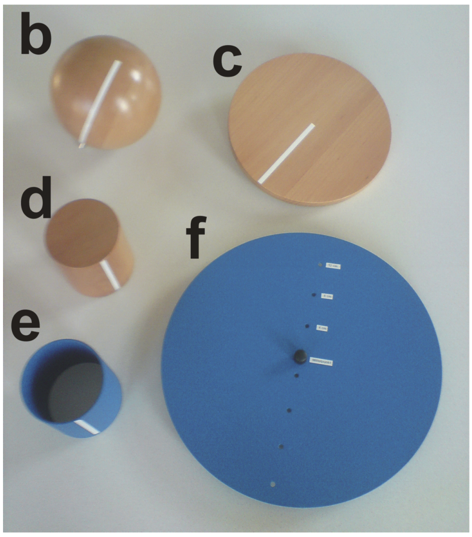

Abbildung 2: Probekörper

a) Stab der Hantel: Länge $l_{\mathrm{St}} = 620\,\mathrm{mm}$;
Durchmesser $d_{\mathrm{St}} = 6\,\mathrm{mm}$; Masse $m_{\mathrm{St}} = (134.9 \pm 1.0)\,\mathrm{g}$
Zylindrische Massestücke: Höhe $h_m = 20.4\,\mathrm{mm}$;
Durchmesser $d_m = 45.1\,\mathrm{mm}$; Masse $m_m = (260.8 \pm 0.7)\,\mathrm{g}$

b) Eine Holz-Vollkugel:
Durchmesser $d_b = 148\,\mathrm{mm}$; Masse $m_b = (1182 \pm 1)\,\mathrm{g}$

c) Eine Holz-Scheibe:
Durchmesser $d_c = 220\,\mathrm{mm}$; Masse $m_c = (426.8 \pm 1.5)\,\mathrm{g}$

d) Ein Holz-Vollzylinder:
Durchmesser $d_d = 89.6\,\mathrm{mm}$; Masse $m_d = (417 \pm 1)\,\mathrm{g}$

e) Ein Metall-Hohlzylinder:
Außendurchmesser $d_{e_1} = 90.4\,\mathrm{mm}$;
Innendurchmesser $d_{e_2} = 85.7\,\mathrm{mm}$;
Masse $m_e = (401.9 \pm 0.3)\,\mathrm{g}$

f) Eine dünne Metall-Scheibe, die um verschiedene, zur Rotationssymmetrieachse parallele Achsen, gedreht werden kann:
Durchmesser $d_f = 321\,\mathrm{mm}$; Masse $m_f = (453 \pm 3)\,\mathrm{g}$

Für die Montage von Holz-Vollzylinder und Metall-Hohlzylinder ist außerdem ein Aufnahmeteller nötig. Addieren Sie hierfür zu den Trägheitsmomenten der Zylinder $I_{\mathrm{t}} = 2 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$.

Achtung: Hantel und Probekörper für die Messung immer im Uhrzeigersinn um 180° auslenken. Niemals weiter als 360° auslenken, da die Feder beschädigt werden kann!

6 Hausaufgaben

Vor dem Praktikumstermin zu Hause zu erledigen:

1. Leiten Sie die Formel für das Trägheitsmoment eines Zylinders her (Drehung um Symmetrieachse). Stellen Sie die Formeln für die übrigen im Versuch verwendeten Körper anhand der Lehrbuchliteratur zusammen. Berechnen Sie dann die **Trägheitsmomente** und deren **Unsicherheiten** (durch die Unsicherheit in der Masse) für die im Versuch zur Verfügung stehenden Körper (s. auch Abschnitt 5):

   a) Die Stange alleine und mit den beiden zylindrischen Massen in den Abständen $R = (5,\ 10$ und $15)\,\mathrm{cm}$ nach Gln. (6) & (7). Verwenden Sie bei der Stange die Näherung für kleine Durchmesser.

   b) Holz-Vollkugel (Drehachse durch Mittelpunkt)

   c) Holz-Scheibe (Drehachse gleich Symmetrieachse)

   d) Holz-Vollzylinder mit Aufnahmeteller (Drehachse gleich Symmetrieachse)

   e) Metall-Hohlzylinder mit Aufnahmeteller (Drehachse gleich Symmetrieachse)

2. a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Stange ohne die Näherung für kleinen Durchmesser. Vergleichen Sie den Wert mit Hausaufg. 1 a). Ist die Näherung gerechtfertigt?

   b) Wie groß ist der Anteil I_0 im Satz von Steiner [Glg. (7)] für die Zylinder im Vergleich zum gesamten Trägheitsmoment I für die Stange mit den Massen im Abstand $R = 5$ cm? Kann man Ihrer Meinung nach diesen Anteil vernachlässigen, d. h. wäre die Annahme von Punktmassen gerechtfertigt?

7 Präsenzaufgaben

1. Stellen Sie sicher, dass Ihr Aufbau waagrecht steht (Wasserwaagen-Libelle). Montieren Sie die Stange (ohne Massestücke) mittig in der Rotationshalterung. Messen Sie mit dem Präzisionskraftmesser die Kraft, die nötig ist, den Stab um 180° im Uhrzeigersinn auszulenken. Platzieren sie den Kraftmesser dafür senkrecht zur Stange in den Abständen $R =$ (10, 15, 20 und 25) cm. Nutzen Sie die Einkerbungen der Stange. Diese haben einen Abstand von 5 cm. Bestimmen Sie aus dem Mittelwert der erhaltenen Drehmomente das Richtmoment D der Feder nach Glg. (1) und der Beziehung $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

2. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment der Stange alleine und mit den beiden Massestücken in den Abständen $R =$ (5, 10 und 15) cm. Lenken Sie hierzu die Stange um 180° im Uhrzeigersinn aus und messen Sie mit der Stoppuhr die Zeitdauer für 10 Vollschwingungen [Glg. (5)]. Nehmen Sie jedes Mal vier Messungen vor und mitteln Sie. Vergleichen Sie die Werte mit Ihren Berechnungen aus Hausaufgabe 1 a).

3. Überprüfen Sie den Satz von Steiner:

   a) Setzen Sie Glg. (5) als Gesamtträgheitsmoment in den Satz von Steiner für die Scheibe ein. Stellen Sie die Gleichung dann nach T^2 um. Sie erhalten somit eine Geradengleichung mit der Variablen R^2.

   b) Bestimmen Sie die Schwingungsdauer des Systems mit Metallscheibe jeweils bei Montage im Mittelpunkt und in den Abständen $R = (4, 8, 12)$ cm vom Mittelpunkt. Führen Sie hier jede Messung einmal über *fünf* Vollschwingungen durch. Tragen Sie T^2 gegen R^2 auf. Bestimmen Sie aus der Steigung der Zeichnung und der Gleichung aus a) das Richtmoment der Feder, bestimmen Sie graphisch dessen Unsicherheit und vergleichen Sie den Wert mit Ihrer Messung aus Präsenzaufg. 1. Welchem Wert würden Sie mehr vertrauen?

4. Wählen Sie einen der verbleibenden Körper und bestimmen Sie dessen Trägheitsmoment wieder aus jeweils vier Messungen; für Holz-Vollkugel und Holz-Scheibe mit 5 Vollschwingungen; für Voll- und Hohlzylinder mit 10 Vollschwingungen. Tauschen Sie sich mit den anderen Gruppen über die Trägheitsmomente der anderen Körper aus (soweit verfügbar) und vergleichen Sie die ermittelten Werte mit denen aus Hausaufgabe 1.